PROCESAREA SEMNALELOR - CURS 09

SERII DE TIMP - MODELE ARMA

Cristian Rusu

CUPRINS

- mediere exponențială
- modele MA
- modele ARMA

MEDIERE EXPONENȚIALĂ

- funcțiile de mediere glisantă atribuie aceeași pondere elementelor și folosește un număr finit de elemente din trecut

- o idee nouă: contribuția pe care o are fiecare termen în medie descrește pe măsură ce trece timpul

- primim o serie de timp cu N elemente: $x[0], x[2], \ldots, x[N-1]$

- creăm o nouă serie de timp:

$$s[0] = x[0]$$
$$s[t] = \alpha x[t] + (1-\alpha)s[t-1], t > 1$$

- α se numește factorul de uitare (sau de netezire), $0 \leq \alpha \leq 1$

- α trebuie ales

MEDIERE EXPONENȚIALĂ

- de ce se numește mediere exponențială?

$$
\begin{aligned}
s[t] &= \alpha x[t] + (1-\alpha)s[t-1] \\
&= \alpha x[t] + \alpha(1-\alpha)x[t-1] + (1-\alpha)^2 s[t-2] \\
&= \alpha(x[t] + (1-\alpha)x[t-1]) + (1-\alpha)^2 s[t-2] \\
&= \dots
\end{aligned}
$$

MEDIERE EXPONENȚIALĂ

- de ce se numește mediere exponențială?

$$
\begin{aligned}
s[t] &= \alpha x[t] + (1-\alpha)s[t-1] \\
&= \alpha x[t] + \alpha(1-\alpha)x[t-1] + (1-\alpha)^2 s[t-2] \\
&= \alpha(x[t] + (1-\alpha)x[t-1]) + (1-\alpha)^2 s[t-2] \\
&= \alpha(x[t] + (1-\alpha)x[t-1] + (1-\alpha)^2 x[t-2] + \ldots + (1-\alpha)^{t-1}x[1]) + (1-\alpha)^t x[0] \\
&= \alpha \sum_{i=0}^{t-1} (1-\alpha)^i x[t-i] + (1-\alpha)^t x[0]
\end{aligned}
$$

- progresia matematică de puteri ale lui $(1-\alpha)$ este o versiune discretă a funcției exponențiale

- de ce se numește mediere?

MEDIERE EXPONENȚIALĂ

- de ce se numește mediere?

$$\alpha \sum_{i=0}^{t-1} (1-\alpha)^i = \alpha \frac{1-(1-\alpha)^t}{1-(1-\alpha)} = 1-(1-\alpha)^t$$

- deci avem că:

$$\alpha \sum_{i=0}^{t-1} (1-\alpha)^i - (1-\alpha)^t = 1$$

- adică avem o mediere ponderată

MEDIERE EXPONENȚIALĂ

- cum îl calculăm pe α?

$$s[t] = \alpha(x[t] + (1-\alpha)x[t-1] + (1-\alpha)^2 x[t-2] + \ldots + (1-\alpha)^{t-1}x[1]) + (1-\alpha)^t x[0]$$

$$= \alpha \sum_{i=0}^{t-1} (1-\alpha)^i x[t-i] + (1-\alpha)^t x[0]$$

- avem două opțiuni:
    - îl alegem
    - îl calculăm

- dacă vrem să îl calculăm cum facem?

MEDIERE EXPONENȚIALĂ

- cum îl calculăm pe α?

$$s[t] = \alpha(x[t] + (1-\alpha)x[t-1] + (1-\alpha)^2 x[t-2] + \ldots + (1-\alpha)^{t-1}x[1]) + (1-\alpha)^t x[0]$$
$$= \alpha \sum_{i=0}^{t-1} (1-\alpha)^i x[t-i] + (1-\alpha)^t x[0]$$

- avem două opțiuni:
    - îl alegem
    - îl calculăm

- dacă vrem să îl calculăm cum facem?
    - minimizăm $\sum_{t=0}^{N-2} (s[t] - x[t+1])^2$, nu $\sum_{t=0}^{N-1} (s[t] - x[t])^2$ care are o soluție banală
    - putem să folosim cele mai mici pătrate ca să rezolvăm pentru α?

MEDIERE EXPONENȚIALĂ

- cum îl calculăm pe α?

$$s[t] = \alpha(x[t] + (1-\alpha)x[t-1] + (1-\alpha)^2 x[t-2] + \ldots + (1-\alpha)^{t-1}x[1]) + (1-\alpha)^t x[0]$$
$$= \alpha \sum_{t=0}^{t-1} (1-\alpha)^i x[t-i] + (1-\alpha)^t x[0]$$

- avem două opțiuni:
  - îl alegem
  - îl calculăm

- dacă vrem să îl calculăm cum facem?
  - minimizăm $\sum_{t=0}^{N-2} (s[t] - x[t+1])^2$, nu $\sum_{t=0}^{N-1} (s[t] - x[t])^2$ care are o soluție banală
  - putem să folosim cele mai mici pătrate ca să rezolvăm pentru α?
  - NU, pentru că problema nu este liniară în α
  - atunci, cum găsim α?

MEDIERE EXPONENȚIALĂ

- un calcul greșit pentru α

$$(s[t] - x[t+1])^2 = (\alpha(x[t] - s[t-1]) + s[t-1] - x[t+1])^2$$

- adică avem nevoie de

$$\alpha(x[t] - s[t-1]) \approx x[t+1] - s[t-1]$$

- cum rezolvăm acum?

MEDIERE EXPONENȚIALĂ

- un calcul <u>greșit</u> pentru α

$$(s[t] - x[t+1])^2 = (\alpha(x[t] - s[t-1]) + s[t-1] - x[t+1])^2$$

- adică avem nevoie de

$$\alpha(x[t] - s[t-1]) \approx x[t+1] - s[t-1]$$

- cum rezolvăm acum?

$$\begin{bmatrix} x[t] - s[t-1] \\ x[t-1] - s[t-2] \\ x[t-2] - s[t-3] \\ \vdots \\ x[2] - s[1] \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} x[t+1] - s[t-1] \\ x[t] - s[t-2] \\ x[t-1] - s[t-3] \\ \vdots \\ x[3] - s[1] \end{bmatrix}$$

MEDIERE EXPONENȚIALĂ

- un calcul greșit pentru α

$$(s[t] - x[t+1])^2 = (\alpha(x[t] - s[t-1]) + s[t-1] - x[t+1])^2$$

- adică avem nevoie de

$$\alpha(x[t] - s[t-1]) \approx x[t+1] - s[t-1]$$

- cum rezolvăm acum?

$$\begin{bmatrix} x[t] - s[t-1] \\ x[t-1] - s[t-2] \\ x[t-2] - s[t-3] \\ \vdots \\ x[2] - s[1] \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} x[t+1] - s[t-1] \\ x[t] - s[t-2] \\ x[t-1] - s[t-3] \\ \vdots \\ x[3] - s[1] \end{bmatrix}$$

- $\alpha = \dfrac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}} = \dfrac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|_2^2}$

MODELUL MA

- modelul medie glisantă (moving average - MA)
  - ideea: trecutul afectează viitorul (combinații ale valorilor din trecut pot prezice valori din viitor)
  - la momentul i vom face o combinație liniară de erori anterioare
  - cât de mult mergem în trecut? un orizont p pe care îl alegem

- formularea matematică

$$\hat{y}[i] = \epsilon[i] + \theta_1\epsilon[i-1] + \theta_2\epsilon[i-2] + \ldots + \theta_p\epsilon[i-p] + \mu = \begin{bmatrix} 1 & \theta_1 & \ldots & \theta_p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon[i] \\ \epsilon[i-1] \\ \vdots \\ \epsilon[i-p] \\ \mu \end{bmatrix}$$

- ce este operația de mai sus?

MODELUL MA

- modelul medie glisantă (moving average - MA)
    - ideea: trecutul afectează viitorul (combinații ale valorilor din trecut pot prezice valori din viitor)
    - la momentul i vom face o combinație liniară de erori anterioare
    - cât de mult mergem în trecut? un orizont p pe care îl alegem

- formularea matematică

$$\hat{y}[i] = \epsilon[i] + \theta_1\epsilon[i-1] + \theta_2\epsilon[i-2] + \ldots + \theta_p\epsilon[i-p] + \mu = \begin{bmatrix} 1 & \theta_1 & \ldots & \theta_p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon[i] \\ \epsilon[i-1] \\ \vdots \\ \epsilon[i-p] \\ \mu \end{bmatrix}$$

- ce este operația de mai sus?
- produs scalar, deci din nou cele mai mici pătrate pentru a estima parametrii θ ai modelului
- eroarea la fiecare pas poate să fie estimată ca zgomot gaussian

MODELUL MA

- un exemplu

- estimăm media unei serii să fie 12, apoi la fiecare moment de timp avem și presupunem că am estimat $\theta_1 = \frac{1}{2}$

ziua	predicția	valoarea reală	eroarea
1	12	14	2
2	13 = 12 + 2/2	13	0
3	12 = 12 + 0/2	8	-4
4	10 = 12 - 4/2	14	4
5	…	…	…
6	…	…	…

- Presupunerea implicită este că valorile reale fluctuează în jurul mediei

COMBINAȚIA: ARMA

- ARMA = AR(p) + MA(q)

$$y[t] = \sum_{i=1}^{p} x_i y[t-i] + \sum_{i=1}^{q} \theta_i \epsilon[t-i] + \epsilon[t]$$

- parametrii sunt:
  - p parametrii auto-regresivi
  - q parametrii de mediere

- problema: din cauza MA, optimizarea parametrilor devine foarte dificilă aici

- discuție la tablă cazul $p = 1$ și $q = 1$

DATA VIITOARE

- modele mai avansate pentru serii de timp